

Implementation eines 4-knotigen EAS-Scheibenelementes für physikalisch nichtlineare Berechnungen

1. STUDIENARBEIT

am

Institut für Strukturmechanik
Fakultät Bauingenieurwesen
Bauhaus-Universität Weimar

von

cand.-Ing. Maik Brehm

Hauptreferent: Dipl.-Ing. Thomas Most

Bearbeitungszeitraum: 07.11.02 bis 19.12.02

Weimar, den 19. Dezember 2002

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Studienarbeit wird für ein 4-knotiges Scheibenelement die „Enhanced Assumed Strain“-Formulierung angewendet, um die bei isoparametrischen Elementen bekannten Schubversteifungseffekte aufzuheben. Es werden diese Lockingeffekte kurz erläutert. Ausgehend vom isoparametrischen 4-knotigen Scheibenelement, wird der lineare Ansatz der EAS-Methode vorgestellt und dann auf den physikalisch nichtlinearen Ansatz erweitert. Weiterhin werden Beispiele vorgestellt, die zum einen eine Kontrolle der Elementimplementierung gewährleisten und zum anderen die Verbesserung des isoparametrischen 4-knotigen Scheibenelementes durch die EAS-Formulierung zeigen.

Das 4-knotige Scheibenelemente mit EAS-Formulierung wurde in das FE-Programm-
system **SIang** implementiert.

Bauhaus-Universität Weimar

Institut für Strukturmechanik

Aufgabenstellung für die Studienarbeit von Herrn Maik Brehm

Implementation eines 4-knotigen EAS-Scheibenelementes für physikalisch nichtlineare Berechnungen

Im Rahmen der Studienarbeit soll für ein 4-knotiges Scheibenelement die „Enhanced Assumed Strain“-Formulierung angewendet werden, um die bei isoparametrischen Elementen bekannten Schubversteifungseffekte aufzuheben. Dabei ist die Methode zunächst für den gebräuchlichen linearen Ansatz vorzustellen. Die verbesserten Elementeigenschaften gegenüber dem isoparametrischen Element sind aufzuzeigen.

Für nichtlineare Berechnungen ist eine direkte Ermittlung der EAS-Parameter nicht möglich. Daher sind verschiedene Möglichkeiten der iterativen Bestimmung vorzustellen und hinsichtlich ihrer numerischen Aufwendigkeit und des Konvergenzverhaltens zu diskutieren. Die Funktionsfähigkeit der gewählten Methode ist an einem Beispiel unter Aktivierung der EAS-Moden nachzuweisen (z.B. plastizierender Kragträger unter Endmomentenbelastung). Zum Nachweis der korrekten Implementation des Elementes hinsichtlich der richtigen Wiedergabe konstanter Spannungszustände ist der Patch-Test für den linearen und nichtlinearen Fall vorzustellen und anzuwenden.

Kandidat:	cand.-Ing. Maik Brehm
Matrikelnummer:	980035
Seminargruppe:	B/98/A
Bearbeitungszeitraum:	07.11.02 bis 19.12.02; 6 Wochen
Hauptreferent:	Dipl.-Ing. Thomas Most

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Mathematische Grundlage	1
3 Verschiebungsmethode	4
3.1 Einführung	4
3.2 Element plane4n	4
3.2.1 Lineare Formulierung	4
3.2.2 Nichtlineare Formulierung	6
4 Erweiterte Verschiebungsmethode	7
4.1 Einführung	7
4.2 Locking	7
4.3 Erweiterter Verzerrungsansatz	8
4.4 Element plane4n4eas	9
4.4.1 Lineare Formulierung	9
4.4.2 Nichtlineare Formulierung	12
5 Numerische Beispiele	18
5.1 Einführung	18
5.2 Patch-Test	18
5.3 Kragbalken mit linearer Momentenbeanspruchung	19
5.4 Kragbalken mit konstanter Momentenbeanspruchung	21
5.5 Aktivierung der EAS-Parameter unter Plastizierung	22
6 Zusammenfassung und Ausblick	23
A CD-ROM	25
B Selbstständigkeitserklärung	25

1 Einleitung

Ein Hauptbestandteil der aktuellen Förderperiode des Teilprojektes A1 des Sonderforschungsbereiches 524 „Werkstoffe und Konstruktionen für die Revitalisierung von Bauwerken“ ist die Simulation diskreter Rissfortschrittsprobleme unter Verwendung einer netzfreien Diskretisierung (siehe [Most and Bucher, 2003a], [Most and Bucher, 2003b]) und nichtlinearer Materialien mit stochastisch verteilten Materialeigenschaften. Hierbei werden netzfreie Bereiche mit finiten Elementen gekoppelt. Um die Fehler aus der Finiten Elemente Formulierung möglichst gering zu halten, sind verbesserte lockingfreie finite Elemente für das FE-Programmsystem **SLang** [Bucher, 2002] notwendig. Einen Überblick über die verschiedenen lockingfreien Formulierungen zeigt [Andelfinger, 1991].

Ziel dieser Arbeit ist die Implementierung eines lockingfreien 4-knotigen Scheibenelementes mit EAS-Formulierung in das FE-Programmsystem **SLang** [Bucher, 2002], wobei physikalisch nichtlineare, geometrisch lineare Berechnungen möglich sein sollen. Weiterhin wird diese Methode in der vorliegenden Arbeit erläutert und diskutiert.

2 Mathematische Grundlage

Um nachfolgende Transformationen in Abschnitt 4 nachvollziehbar darstellen zu können, ist eine Transformationsmatrix \mathbf{T} nötig, die für die Transformation der zusätzlichen Moden im erweiterten Verschiebungsansatz verwendet wird. Mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T} können lokale natürliche Dehnungen in lokale kartesische Dehnungen transformiert werden. Im Folgenden wird diese Transformation ausführlich hergeleitet.

Aus der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

werden die kovarianten Basisvektoren

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{12} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gewonnen. Somit kann die kovariante Transformationsmatrix \mathbf{G}_{ij} für die Koordinatentransformationen aufgestellt werden.

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Die kontravariante Transformationsmatrix \mathbf{G}^{ij} ergibt sich aus der Inversen der kovarianten Transformationsmatrix \mathbf{G}_{ij} .

$$\mathbf{G}^{ij} = \mathbf{G}_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{G}_{ij}} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & -\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 \\ -\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Somit ergeben sich die kontravarianten Basisvektoren in tensorieller Schreibweise.

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (5)$$

Nach Anwendung der Gauß'schen Summenkonvention mit $i = 1, 2$ und $j = 1, 2$ für den vorliegenden 2-dimensionalen Fall erhält man

$$\mathbf{g}^1 = g^{11} \mathbf{g}_1 + g^{12} \mathbf{g}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^2 = g^{21} \mathbf{g}_1 + g^{22} \mathbf{g}_2 \quad (6)$$

und unter Zuhilfenahme von Gleichung (1) und Gleichung (4) sind

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{J_{11}^2 J_{22}^2 + J_{12}^2 J_{21}^2 - 2 J_{11} J_{12} J_{21} J_{22}} \begin{bmatrix} (J_{21}^2 + J_{22}^2) J_{11} - (J_{11} J_{21} + J_{12} J_{22}) J_{21} \\ (J_{21}^2 + J_{22}^2) J_{12} - (J_{11} J_{21} + J_{12} J_{22}) J_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (7)$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{J_{11}^2 J_{22}^2 + J_{12}^2 J_{21}^2 - 2 J_{11} J_{12} J_{21} J_{22}} \begin{bmatrix} (J_{11}^2 + J_{12}^2) J_{21} - (J_{11} J_{21} + J_{12} J_{11}) J_{11} \\ (J_{11}^2 + J_{12}^2) J_{22} - (J_{11} J_{21} + J_{12} J_{22}) J_{12} \end{bmatrix}.$$

Die Transformation der Dehnungen erfolgt in tensorieller Schreibweise.

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{mn} (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{g}^n \cdot \mathbf{e}_l) \quad (8)$$

Nach Gleichung (8) können die Dehnungen bezogen auf das natürliche Koordinatensystem (r,s) in Dehnungen bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (x,y) transformiert werden. Somit wird über $k, l = x, y$ und $m, n = r, s$ summiert. Die Indizierung der kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^r und \mathbf{g}^s entsprechen nach Gleichung (7) den Vektoren \mathbf{g}^1 und \mathbf{g}^2 . Die Vektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y sind die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems. In diesem Fall sind

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Für die lokalen kartesischen Dehnungen erhält man nach Gleichung (8).

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \epsilon_{rr} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) & \epsilon_{yy} &= \epsilon_{rr} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) \\
 &+ \epsilon_{ss} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) & &+ \epsilon_{ss} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) \\
 &+ \epsilon_{rs} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) & &+ \epsilon_{rs} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) \\
 &+ \epsilon_{sr} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) & &+ \epsilon_{sr} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) \\
 \epsilon_{xy} &= \epsilon_{rr} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) & \epsilon_{yx} &= \epsilon_{rr} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) \tag{10} \\
 &+ \epsilon_{ss} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) & &+ \epsilon_{ss} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) \\
 &+ \epsilon_{rs} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) & &+ \epsilon_{rs} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) \\
 &+ \epsilon_{sr} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) & &+ \epsilon_{sr} (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1)
 \end{aligned}$$

Folglich lässt sich die Inverse der gesuchten Transformationsmatrix \mathbf{T}^{-1} ableiten, welche die lokalen natürlichen Dehnungen in lokale kartesische Dehnungen transformiert.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{ss} \\ 2\epsilon_{rs} \end{bmatrix} \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^{-1} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1)^2 & (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1)^2 & (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 & (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2)^2 & (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) & (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) & (\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2) + (\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21})^2} \begin{bmatrix} J_{22}^2 & J_{12}^2 & -J_{12}J_{22} \\ J_{21}^2 & J_{11}^2 & -J_{11}J_{21} \\ -2J_{21}J_{22} & -2J_{11}J_{12} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \tag{12}
 \end{aligned}$$

Nach Invertierung der Matrix \mathbf{T}^{-1} erhält man

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{11}^2 & J_{21}J_{22} \\ 2J_{11}J_{21} & 2J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Dies ist die gesuchte Transformationsmatrix \mathbf{T} für die Transformation von lokalen natürlichen in lokalen kartesischen Dehnungen bzw. Spannungen nach Gleichung (11).

3 Verschiebungsmethode

3.1 Einführung

In diesem Abschnitt wird das 4-knotige, isoparametrische Scheibenelement plane4n vorgestellt. Es gehört der Familie der lagrange Elemente an. Die Formulierung ist für geometrisch lineare, physikalisch nichtlineare Berechnungen ausgelegt. Aufgrund der geringen Anzahl von Knoten und Knotenfreiheitsgraden ist es sehr übersichtlich und somit einfach in das FE-Programmsystem Slang [Bucher, 2002] zu implementieren. Wie jedes isoparametrische Element soll es den Patch-Test bestehen.

Der Nachteil des Elementes liegt in der fehlerhaften Versteifung. Dies tritt besonders bei schubbeanspruchten Elementen auf, welches die Beispiele im Abschnitt 5 verdeutlichen. Auf den genauen Hintergrund des sogenannten Locking-Effektes wird im Anschnitt 4.2 näher eingegangen.

Im Folgenden wird die lineare Formulierung des finiten Elementes plane4n beschrieben, anschließend kurz die Erweiterung auf die physikalisch nichtlineare Formulierung.

3.2 Element plane4n

3.2.1 Lineare Formulierung

Das finite Element plane4n, dargestellt in natürlichen Koordinaten, ist in Abbildung 1 zu sehen. Diese zeigt die Anordnung der Knoten in natürlichen Koordinaten und die Lage der Integrationspunkte (Gaußpunkte).

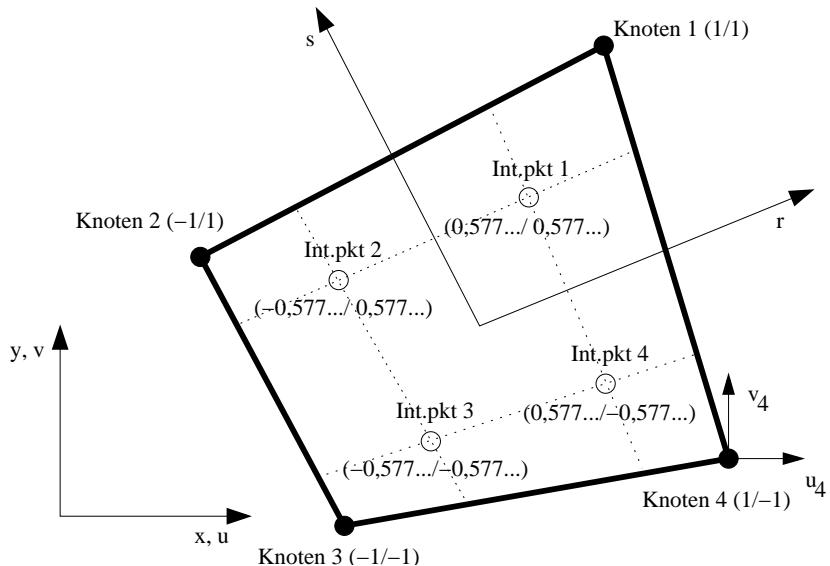


Abbildung 1: Knoten und Integrationspunktanordnung im natürlichen Koordinatensystem (r,s)

Das 4-knotige Scheibenelement hat bilineare Form- und Ansatzfunktionen.

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & ; \quad h_2 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) & ; \quad h_4 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \end{aligned} \quad (14)$$

Die partiellen Ableitungen der Formfunktionen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s) & ; \quad \frac{\partial h_1}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r) \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1+s) & ; \quad \frac{\partial h_2}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1-r) \\ \frac{\partial h_3}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1-s) & ; \quad \frac{\partial h_3}{\partial s} &= -\frac{1}{4}(1-r) \\ \frac{\partial h_4}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1-s) & ; \quad \frac{\partial h_4}{\partial s} &= -\frac{1}{4}(1+r) \end{aligned} \quad (15)$$

Mit Hilfe der Gleichung (15) kann die \mathbf{B}_r -Matrix in lokalen natürlichen Koordinaten erstellt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_r &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial r} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccccc} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial h_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial s} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} & \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial s} & \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_3}{\partial s} & \frac{\partial h_3}{\partial r} & \frac{\partial h_4}{\partial s} & \frac{\partial h_4}{\partial r} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Unter Zuhilfenahme der Jacobi-Matrix \mathbf{J} nach Gleichung (1) können die partiellen Ableitungen aus Gleichung (16) transformiert werden.

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{array} \right] = \mathbf{J}^{-1} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{array} \right] \text{ mit } i = 1, 2, 3, 4 \quad (17)$$

Die \mathbf{B} -Matrix im kartesischen Koordinatensystem ist demnach

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{array} \right]. \quad (18)$$

Die Materialmatrix \mathbf{C} für ebene, lineare Verzerrungszustände und isotropes Materialverhalten ergibt sich mit dem E-Modul E und der Querdehnzahl ν zu

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right]. \quad (19)$$

Mit Hilfe von Gleichung (18) und Gleichung (19) kann nun die Steifigkeitsmatrix erstellt werden.

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{8 \times 8} \quad (20)$$

Somit kann der Verschiebungsvektor \mathbf{d} mit Hilfe der Gleichung (20) und dem Knotenlastvektor \mathbf{f} berechnet werden.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{bmatrix}^T = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^8 \quad (21)$$

Die Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}$ ergeben sich aus der Multiplikation der Gleichung (18) und der Gleichung (21) an der gewählten Stelle im Element. Da die Integrationspunkte für die numerische Integration verwendet werden, werden auch vorzugsweise die Dehnungen an diesen Stellen ausgewertet.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (22)$$

Die Komponenten des Spannungstensors ergeben sich aus Gleichung (19) und Gleichung (22).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (23)$$

3.2.2 Nichtlineare Formulierung

Die Erweiterung der vorhergehenden linearen Vorgehensweise auf physikalisch nichtlineare Probleme ist unkompliziert. Hierzu wird ein zusätzlicher Rückstellkraftvektor \mathbf{r} benötigt.

$$\mathbf{r} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^8 \quad (24)$$

Da die Materialmatrix \mathbf{C} im nichtlinearen Bereich von den Verzerrungen abhängt, ist eine Iteration nötig. Der Rückstellkraftvektor \mathbf{r} dient als Abbruchkriterium dieser Iteration, zum Beispiel beim Newton-Raphson-Verfahren.

4 Erweiterte Verschiebungsmethode

4.1 Einführung

Das in diesem Abschnitt dargestellte finite Element plane4n4eas ist ein 4-knotiges Scheibenelement mit EAS-Formulierung nach [Simo and Rifai, 1990]. Die Enhanced Assumed Strain Methode beruht auf einem erweiterten Verzerrungsansatz, welcher in diesem Fall durch vier zusätzliche Moden definiert wird. Dieses erweiterte Element soll die Versteifungseffekte des plane4n im Schubbereich kompensieren.

Im Folgenden wird zunächst der Locking-Effekt kurz beschrieben, der den Grund für die Entwicklung der EAS-Methode darstellt. Danach wird der erweiterte Verzerrungsansatz nach dem Prinzip von Hu-Washizu allgemein erläutert, bevor das finite Element plane4n4eas mit linearen und physikalisch nichtlinearen Ansätzen vorgestellt wird.

Dieses finite Element wurde in das FE-Programmsystem SIang [Bucher, 2002] implementiert.

4.2 Locking

Der Begriff Locking wird schon seit den sechziger Jahren für jede Art von Versteifungsproblemen bei finiten Elementformulierungen benutzt. [Bischoff, 2001] versucht diesen komplexen Begriff wie folgt zu beschreiben.

Locking ist der Effekt einer verschlechterten Konvergenzrate in Abhängigkeit eines „kritischen“ Parameters. Die Grenze des Parameters ist infinitiv, die der Konvergenzrate kann gegen Null streben.

Prinzipiell können diese Probleme nach [Bischoff, 2001] mechanische, mathematische oder numerische Ursachen haben. Die einzelnen Versteifungsarten werden in „transverse shear locking“, „volumetric locking“, „membran locking“ und „shear locking“ unterschieden. Bei Scheibenelementen sind prinzipiell „shear locking“ und „volumetric locking“ möglich. Das Letztere tritt nur bei elastisch inkompressiblen und geometrisch nichtlinearem Materialverhalten auf. Weiterhin kann man diese Art von Locking bei plastisch inkompressiblem Materialverhalten beobachten, bei dem die plastische Fließbedingung nach von Mises gewählt wurde. Da für die hier betrachteten Scheibenelemente nur kompressibles Materialverhalten vorausgesetzt wird, tritt bei dem 4-knotigen isoparametrischen Scheibenelement plane4n nur das „shear locking“ auf. Diese Schubversteifungen können mit Hilfe der EAS-Methode kompensiert werden.

4.3 Erweiterter Verzerrungsansatz

In Anlehnung an [Andelfinger, 1991] geht der erweiterte Verzerrungsansatz auf das Prinzip von Hu-Washizu zurück. Demnach ergibt sich die innere Energie eines Elementes zu

$$\mathbf{U} = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}_{iso} \mathbf{d} dV. \quad (25)$$

Die isoparametrische \mathbf{B}_{iso} -Matrix entspricht Gleichung (18) und $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_{iso} \mathbf{d}$ der Gleichung (22). Das Verzerrungsfeld wird im nächsten Schritt durch ein erweitertes Verzerrungsfeld ergänzt.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_{iso} \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_{eh} \quad (26)$$

Gleichung (26) eingesetzt in Gleichung (25) ergibt

$$\mathbf{U} = \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{iso} \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_{eh})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_{iso} \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}_{eh}) - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}_{eh} dV. \quad (27)$$

Die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und die erweiterten Verzerrungsfelder $\boldsymbol{\epsilon}_{eh}$ werden so aufeinander abgestimmt, dass sie orthogonal aufeinander stehen.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}_{eh} dV = 0 \quad (28)$$

Es bleiben somit nur noch die Verschiebungen \mathbf{d} und die erweiterten Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{eh}$ als zu bestimmende Größen in Gleichung (27) übrig. Die Spannungen können mindestens konstante Anteile enthalten. Somit kann die Bedingung nach Gleichung (28) vereinfacht werden.

$$\int_V \boldsymbol{\epsilon}_{eh} dV = 0 \quad (29)$$

Die einzige Bedingung für die Wahl des erweiterten Verschiebungsfeldes stellt somit Gleichung (29) dar. Die zusätzlichen Dehnungen integriert über das Element sollen sich aufheben. Diese Bedingung wird im Folgenden verwendet, um den erweiterten Ansatz zu wählen bzw. zu überprüfen.

4.4 Element plane4n4eas

4.4.1 Lineare Formulierung

Es werden zunächst die Ansatzfunktionen des isoparametrischen plane4n Elementes übernommen und um 2 Ansatzfunktionen erweitert.

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & h_2 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) & h_4 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}r^2 & \phi_2 &= \frac{1}{2}s^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Die Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s) & \frac{\partial h_1}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r) \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1+s) & \frac{\partial h_2}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1-r) \\ \frac{\partial h_3}{\partial r} &= -\frac{1}{4}(1-s) & \frac{\partial h_3}{\partial s} &= -\frac{1}{4}(1-r) \\ \frac{\partial h_4}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1-s) & \frac{\partial h_4}{\partial s} &= -\frac{1}{4}(1+r) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial r} &= r & \frac{\partial \phi_1}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial s} &= s \end{aligned} \quad (31)$$

Die komplette \mathbf{B} -Matrix nach der EAS-Methode in kartesischen Koordinaten setzt sich nun zusammen aus der isoparametrischen \mathbf{B}_{iso} -Matrix nach Gleichung (18) und einer \mathbf{B}_{eh} -Matrix, die infolge der zusätzlichen Moden entsteht.

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{iso} | \mathbf{B}_{eh}] \quad , \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 12}, \quad \mathbf{B}_{iso} \in \mathbb{R}^{3 \times 8}, \quad \mathbf{B}_{eh} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \quad (32)$$

Die isoparametrische \mathbf{B}_{iso} -Matrix wird nach dem gleichen Prinzip erzeugt wie in Abschnitt 3.2.1 gezeigt. Nachfolgend wird die Berechnung der \mathbf{B}_{eh} -Matrix beschrieben.

Die folgende auf das natürliche Koordinatensystem bezogene $\mathbf{B}_{eh,r}$ -Matix wird nach dem gleichen Verfahren erzeugt, wie die isoparametrische $\mathbf{B}_{iso,r}$ -Matrix nach Gleichung (16).

$$\mathbf{B}_{eh,r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & r & s & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Um der Bedingung nach Gleichung (29) zu genügen, muss die $\mathbf{B}_{eh,r}$ -Matix mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T} nach Gleichung (13) in kartesische Koordinaten transformiert werden. Da die numerische Integration über die Gaußpunktintegration durchgeführt wird, muss dies für alle Integrationspunkte vorgenommen werden. Die Matrizen \mathbf{J}_0 und \mathbf{T}_0

sind dabei die Jacobi-Matrix \mathbf{J} und die Transformationsmatrix \mathbf{T} ausgewertet im Elementmittelpunkt ($r = s = 0$).

$$\mathbf{B}_{eh} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}_i} \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{B}_{eh,r} \quad (34)$$

Die Wichtung der Integrationspunkte wird dabei über den Faktor $\frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}_i}$ vorgenommen.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}_i} \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{B}_{eh,r} \boldsymbol{\alpha} \det \mathbf{J}_i dr ds = 0 \quad (35)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ stellt dabei die zusätzlichen Freiheitsgrade der zusätzlichen Moden dar und wird noch näher erläutert. Da $\det \mathbf{J}_0$, \mathbf{T}_0^{-1} und $\boldsymbol{\alpha}$ nur konstante Terme innerhalb eines Elementes enthalten, vereinfacht sich Gleichung (35) zu

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{eh,r} dr ds = 0 \quad (36)$$

Diese von Gleichung (29) abgeleitete weiterhin vereinfachte Bedingung ist für die gewählten zusätzlichen Moden einzuhalten. Die Wahl der zusätzlichen Moden ist demnach nicht direkt an eine physikalische Bedingung gebunden.

Setzt man nun diese neue \mathbf{B} -Matrix nach Gleichung (32) in die Gleichung (20) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{iso+eh} &= \int_V [\mathbf{B}_{iso} | \mathbf{B}_{eh}]^T \mathbf{C} [\mathbf{B}_{iso} | \mathbf{B}_{eh}] dV \quad , \quad \mathbf{K}_{iso+eh} \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \int_V [\mathbf{B}_{iso}]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{iso} dV \quad , \quad \mathbf{K}_{11} \in \mathbb{R}^{8 \times 8} \\ \mathbf{K}_{12} &= \int_V [\mathbf{B}_{iso}]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{eh} dV \quad , \quad \mathbf{K}_{12} \in \mathbb{R}^{8 \times 4} \\ \mathbf{K}_{21} &= \int_V [\mathbf{B}_{eh}]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{iso} dV = \mathbf{K}_{12}^T \quad , \quad \mathbf{K}_{21} \in \mathbb{R}^{4 \times 8} \\ \mathbf{K}_{22} &= \int_V [\mathbf{B}_{eh}]^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{eh} dV \quad , \quad \mathbf{K}_{22} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \end{aligned} \quad (38)$$

Analog zur Gleichung (21) ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^8, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^8, \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4 \quad (39)$$

Da den $\boldsymbol{\alpha}$ -Werten keine physikalische Bedeutung oder resultierenden Kräfte zugeordnet werden können, wird die entsprechende rechte Seite dem $\mathbf{0}$ -Vektor gleichgesetzt. Die $\boldsymbol{\alpha}$ -Werte ergeben sich aus der letzten Zeile der Gleichung (39)

$$\mathbf{K}_{21} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{22} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (40)$$

zu

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{d}. \quad (41)$$

Nach [Freischläger, 2000] ist die Invertierung der Matrix \mathbf{K}_{22} für eine positiv definite Werkstoffmatrix \mathbf{C} und kleine Verzerrungen stets möglich. Probleme könnte es jedoch im geometrisch und/oder physikalisch nichtlinearem Bereich geben. Die kondensierte Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} nach der EAS-Methode ergibt sich aus Gleichung (41) eingesetzt in die 1. Zeile der Gleichung (39).

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{12} (-\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{d}) &= \mathbf{f} \\ (\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T) \mathbf{d} &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (42)$$

Dementsprechend ist die kondensierte Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}. \quad (43)$$

Der Verschiebungsvektor \mathbf{d} wird nach Gleichung (21) berechnet werden. Die Gesamtdehnungen für das plane4n4eas ergeben sich zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{iso} \mathbf{d} + \mathbf{B}_{eh} \boldsymbol{\alpha}. \quad (44)$$

Analog dem isoparametrischen Element berechnen sich die Spannungen mit Hilfe der Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}$ (Gleichung (44)) und der Materialmatrix \mathbf{C} (Gleichung (19)) nach Gleichung (23).

4.4.2 Nichtlineare Formulierung

Um von der linearen Formulierung zur Nichtlinearen zu gelangen, ist wie beim isoparametrischen Element neben dem geeigneten Materialgesetz auch der Rückstellkraftvektor \mathbf{r} nötig. Dieser berechnet sich nach [Freischläger, 2000]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{iso} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{r}_{eh} \quad , \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^8 \quad (45)$$

mit

$$\mathbf{r}_{eh} = \int_V \mathbf{B}_{eh}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad , \quad \mathbf{r}_{eh} \in \mathbb{R}^4 \quad (46)$$

und dem isoparametrischen Rückstellkraftvektor \mathbf{r}_{iso} nach Gleichung (24). Dabei ist zu bemerken, das der Rückstellkraftvektor \mathbf{r}_{eh} der zusätzlichen Moden für korrekte $\boldsymbol{\alpha}$ -Werte stets dem **0**-Vektor entspricht. Dies folgt mit $\boldsymbol{\epsilon}_{eh} = \mathbf{B}_{eh} \boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\alpha} = const$ indirekt aus Gleichung (28). Da sich die EAS-Parameter, z.B. während einer Newton-Raphson-Iteration, infolge der veränderten Material- und Steifigkeitsmatrizen ändern, müssen diese ebenso wie die Verschiebungen \mathbf{d} iteriert werden.

Im Folgenden werden nun vier verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der EAS-Parameter zur Verwendung in einer Newton-Raphson-Iteration vorgestellt. Die einzelnen Verfahren werden unter anderem durch Flussdiagramme in übersichtlicher Form dargestellt und sind nur für physikalisch nichtlineare Berechnungen gültig. In [Freischläger, 2000] ist die Erweiterung auf eine geometrisch nichtlineare Formulierung nachzulesen.

Variante 1 - Globale Iteration der EAS-Parameter

Diese Variante war ein erster Versuch, die korrekten EAS-Parameter zu erhalten. Der Quellcode soll hierbei keine speziellen Algorithmen zur Iteration der EAS-Parameter vorsehen. Vielmehr soll die globale volle Newton-Raphson-Iteration automatisch die richtige Lösung bestimmen. Diese Idee wurde jedoch nicht getestet und aus folgenden Gründen verworfen.

Da nicht zwischen plastizierenden und elastischen Elementen unterschieden werden kann, wird der zusätzliche Rechenaufwand für die Bestimmung der EAS-Parameter sehr groß. Dieser spiegelt sich in der Bestimmung der globalen Steifigkeitsmatrix und im Lösen des globalen Gleichungssystems wieder.

Weiterhin ist es möglich, dass im Verlauf der Laststeigerung ein Zustand erreicht wird, der vor der Iteration der EAS-Parameter plastisch ist und durch die Abminderung der Steifigkeit wieder in den elastischen Bereich zurückschwenkt.

Somit birgt dieses Verfahren nicht nur einen hohen Rechenaufwand, sondern auch eine erhöhte Gefahr von Instabilitäten in sich. Es ist deshalb unbrauchbar.

Variante 2 - Lokale Iteration der EAS-Paramenter

Hierbei handelt es sich um eine Interation auf lokaler Elementebene. Die Iteration wird demzufolge nur auf plastizierende Elemente angewendet. Deshalb ist diese Variante gerade bei wenig plastizierenden Elementen innerhalb eines Systems effektiver als Variante 1.

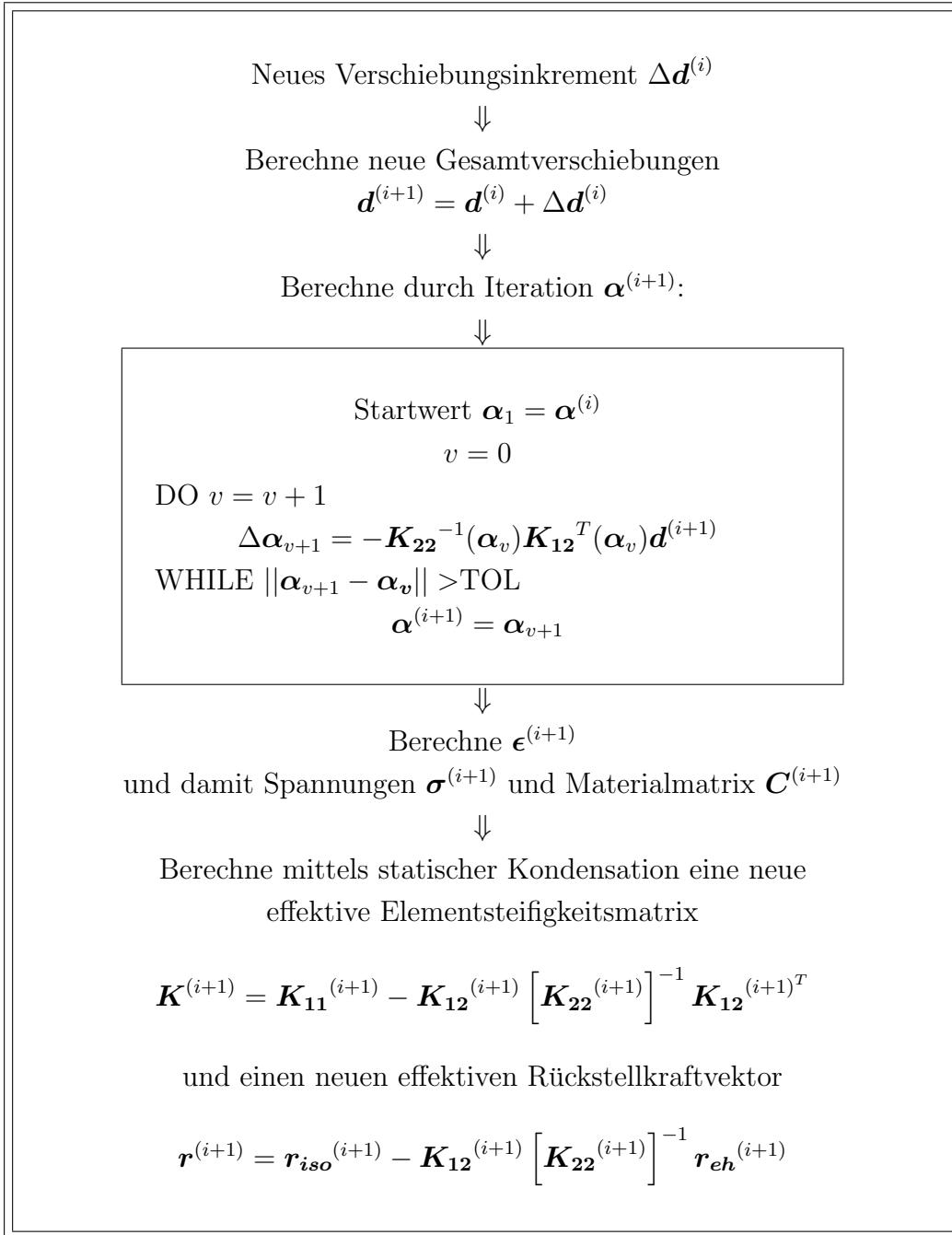


Abbildung 2: Variante 2; Lokale Iteration der EAS-Parameter

Da die EAS-Parameter im nichtlinearen Bereich von der veränderten Materialmatrix \mathbf{C} abhängen, müssen diese iteriert werden. Das Abbruchkriterium stellt hier die Differenz

zwischen den α -Werten des aktuellen und des vorhergenden Iterationsschrittes dar. Diese sollen gegen 0 streben bzw. unterhalb einer Toleranzgrenze TOL liegen.

Obwohl nur die EAS-Parameter der plastizierenden Elemente berechnet werden ist dieses Verfahren aufwendig, da für jeden inneren Iterationsschritt die komplette Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} berechnet werden muss. Die gewählten Startwerte für die EAS-Parameter werden aus dem vorhergehenden Iterationsschritt übernommen. Für starke Nichtlinearitäten und/oder große Intervallschritte sind diese nicht dicht genug an der richtigen Lösung. Deshalb ist es möglich, dass sich keine Konvergenz einstellt und somit falsche Lösungen entstehen.

Variante 3 - Lokale explizite Berechnung der EAS-Parameter

Hierbei handelt es sich um ein klassisches Verfahren zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix nach [Freischläger, 2000]. Die Änderung der EAS-Parameter $\Delta\alpha^{(i)}$ im Schritt i wird durch Lösung eines linearen Gleichungssystems gewonnen.

$$\mathbf{K}_{12}^{(i)T} \Delta\mathbf{d}^{(i)} + \mathbf{K}_{22}^{(i)} \Delta\alpha^{(i)} = \mathbf{r}_{eh}^{(i)} \quad (47)$$

Diese Gleichung erhält man analog zur letzten Zeile der Gleichung (39), mit dem Unterschied, dass hier die Inkremente und nicht die Verschiebungen und α -Werte genutzt werden. Somit ergibt sich für $\Delta\alpha^{(i)}$ im i-ten Schritt.

$$\Delta\alpha^i = \mathbf{K}_{22}^{(i)^{-1}} \mathbf{r}_{eh} - \mathbf{K}_{22}^{(i)^{-1}} \mathbf{K}_{12}^{(i)T} \Delta\mathbf{d}^{(i)} \quad (48)$$

Für lineare Berechnungen ist dieses Vorgehen exakt. Im nichtlinearen Bereich stellt Gleichung (48) nur eine Näherung dar. Somit entspricht der Rückstellkraftvektor \mathbf{r}_{eh} nicht ausreichend genau dem **0**-Vektor und muss deshalb mit berücksichtigt werden. Anschließend werden die EAS-Parameter des folgenden Schrittes wie folgt bestimmt.

$$\alpha^{(i+1)} = \alpha^{(i)} + \Delta\alpha^{(i)} \quad (49)$$

Der Nachteil dieser Methode ist der numerische Aufwand zur Bestimmung der Matrizen $\mathbf{K}_{22}^{(i)^{-1}}$ und $\mathbf{K}_{12}^{(i)T}$ aus dem vorhergehenden i-ten Schritt. Alternativ können diese auch gespeichert werden, was den Aufwand nicht mindert. Da es sich nur um eine Näherungslösung handelt, müssen die Lastschritte ausreichend klein gewählt werden, um konvergierende Lösungen zu erhalten. Die eigentliche Iteration wird global z.B. über eine Newton-Raphson-Iteration durchgeführt. Somit ist der Gesamtaufwand zur Berechnung der globalen Steifigkeitsmatrix und zum Lösen des Gleichungssystems für jeden Lastschritt sehr groß.

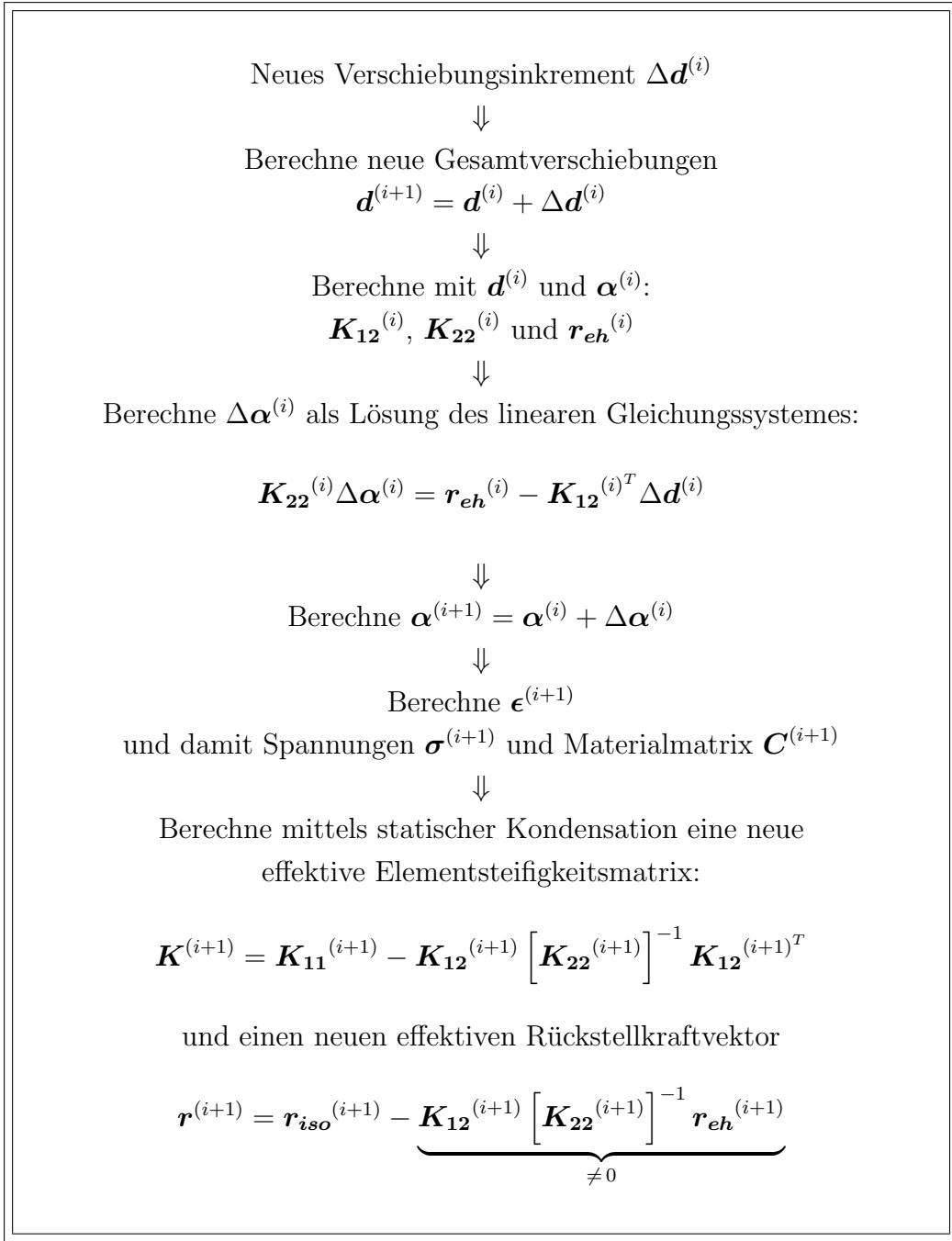


Abbildung 3: Variante 3; Lokale explizite Bestimmung der EAS-Parameter

Variante 4 - Lokale implizite Iteration der EAS-Parameter

Dieses Verfahren, von [Freischläger, 2000] vorgeschlagen, iteriert die EAS-Parameter lokal. Als Abbruchkriterium wird der Rückstellkraftvektor, allein berechnet aus den zusätzlichen Verschiebungsfeldern, verwendet. Dieser muss wiederum gegen den **0**-Vektor konvergieren.

Die Qualität des **0**-Vektors wird mit der euklidischen Norm überprüft, die gegen 0 konvergieren bzw. unterhalb einer gewählten Toleranzgrenze TOL liegen soll. Diese Toleranzgrenze statisch festzulegen ist nicht ratsam, da die Anzahl der numerisch auswertbaren

Nachkommastellen von der Matrix \mathbf{K}_{22} abhängt und damit in erster Linie vom Verfestigungsmodul, welches einen charakteristischen Parameter für jedes Element darstellt. Weiterhin ist eine Schranke für die Anzahl der Iterationsschritte zu empfehlen.

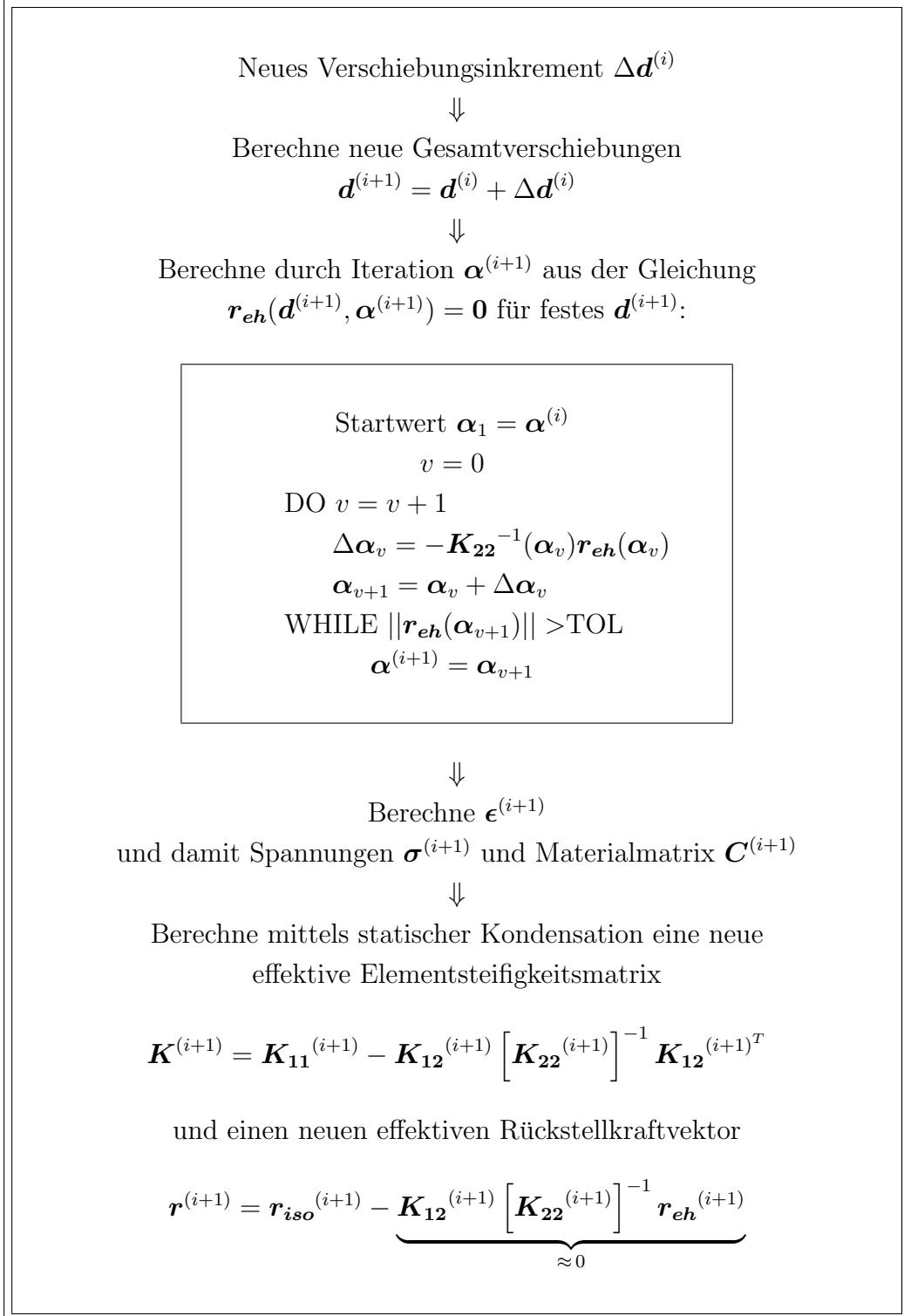


Abbildung 4: Variante 4; Lokale implizite Iteration der EAS-Parameter

Dieses Verfahren ist je nach Anzahl der Iterationsschritte v aufgrund der mehrmaligen Berechnung der \mathbf{K}_{22}^{-1} Matrix und des \mathbf{r}_{eh} Vektors mehr oder weniger aufwendiger als das Verfahren nach Variante 3.

Dennoch wurde dieses Verfahren zur Berechnung der EAS-Parameter in das FE-Programmsystem SIang [Bucher, 2002] implementiert. Es hat sich als sehr stabil erwiesen und bestimmt die EAS-Parameter exakt, d.h. der Rückstellkraftvektor \mathbf{r}_{eh} entspricht innerhalb der Toleranzgrenze dem $\mathbf{0}$ -Vektor.

Anmerkungen zur Implementation

Die Bestimmung der EAS-Parameter muss im FE-Programmsystem SIang [Bucher, 2002] in mehreren Routinen gewährleistet werden, da die Reihenfolge der Berechnung der Steifigkeitsmatrix, Rückstellkräfte und Spannungen bzw. Dehnungen nicht an eine bestimmte Struktur gebunden ist, sondern vom Nutzer selbst bestimmt werden kann. Um dies beibehalten zu können, wird die Routine zur Iteration der EAS-Parameter `elem_plane4n4eas_alpha.c` in der Steifigkeitsroutine `elem_plane4n4eas_stiff.c`, in der Rückstellkraftroutine `elem_plane4n4eas_resforce.c` und in der Spannungsberechnungsroutine `stress_build.c` aufgerufen. Dabei werden zu Beginn der Iteration als Startwerte die α -Werte aus dem Speicher genutzt und nach der Iteration die neuen α -Werte abgespeichert. Demzufolge wird die eigentliche Iteration, z.B. bei Berechnung des Rückstellkraftvektors unmittelbar nach der Berechnung der Steifigkeitsmatrix, nicht aktiviert. Lediglich eine Kontrolle der α -Werte wird vorgenommen. Auf diese Weise konnte der numerische Aufwand gering gehalten werden.

5 Numerische Beispiele

5.1 Einführung

Zur Überprüfung der Vollständigkeit der Elementansätze, des Konvergenzverhaltens, sowie dem Verhalten bei unterschiedlicher Netzverzerrung werden nun vier Testbeispiele zum Vergleich der plane4n und plane4n4eas Elemente durchgeführt.

Die angeführten Tests und Materialparameter werden teilweise den numerischen Beispielen von [Andelfinger, 1991] nachempfunden.

5.2 Patch-Test

Der Patch-Test, auch Fleckentest genannt, soll die Fähigkeit des Elementes überprüfen, bei beliebig verzerrter Geometrie einen Zustand konstanter Spannungen und Verzerrungen darstellen zu können. Dieser Test gilt als bestanden, wenn alle Elementspannungen für jeden beliebigen Integrationspunkt (Flecken) und alle Elementverzerrungen für jeden Knoten mit der analytischen Lösung übereinstimmen. Dies muss sowohl für lineare als auch für nichtlineare Berechnungen gültig sein.

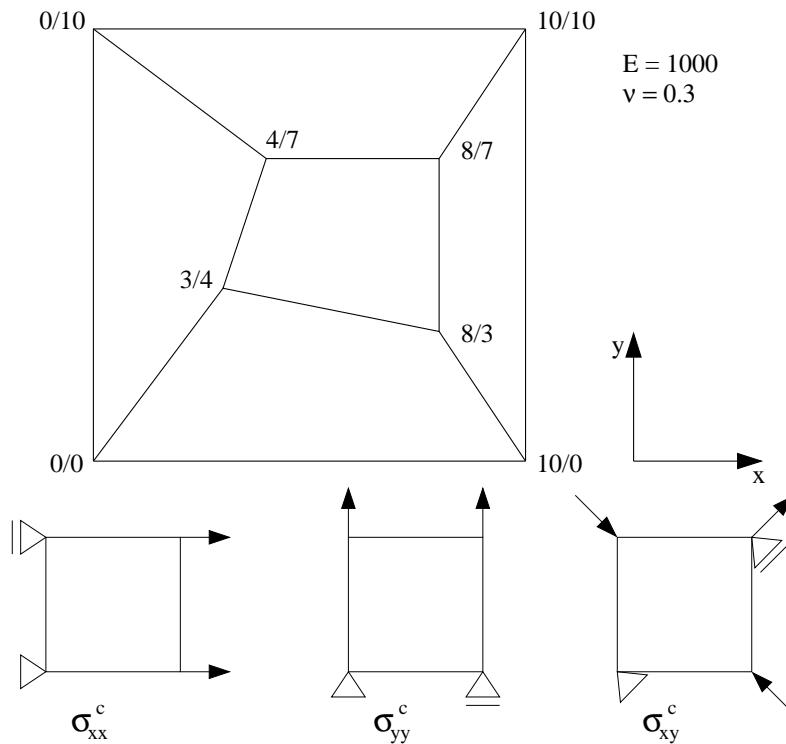


Abbildung 5: Elementkonfiguration und Lastfälle des Patch-Testes

Wenn der Patch-Test erfüllt ist, ist nach [Bathe, 1996] die Konvergenz, auch wenn diese nicht notwendig monoton sein braucht und sehr langsam eintreten kann, sichergestellt.

Ebenfalls stellt der Patch-Test eine Art Vollständigkeitsbedingung für eine Elementgruppierung dar. Nach [Andelfinger, 1991] können, bei entsprechender Elementkonfiguration, nicht alle zero energy modes eines Elementes aufgedeckt werden. Somit ist eine zusätzliche Eigenwertanalyse oder ein Ein-Element-Test mit allgemeiner Belastung für eine vollständige Elementüberprüfung notwendig.

Bei den hier vorliegenden 4-knotigen Scheibenelementen sind genau drei konstante Spannungszustände möglich. In Abbildung 5 ist die gewählte Elementkonfiguration, die nahezu alle Varianten vom symmetrischen Trapez bis zum vollständig verzerrten Element enthält, zu sehen. Weiterhin zeigt Abbildung 5 die gewählten Lagerungsbedingungen und Belastungen für jeden erzeugten konstanten Spannungszustand.

Abbildung 6 zeigt die Resultate des Patchtestes beim Übergang vom linearen zum nicht-linearen Materialverhalten für die Spannungskomponente σ_{xx} . Hierbei wurde die Fließgrenze zu 2 gewählt. Die Verfestigungsmoduli stehen im Verhältnis von 1000 zu 100. Die anderen Material- und Geometriewerte sind Abbildung 5 zu entnehmen. Auch hier ist die Spannung in allen Integrationspunkten gleich. Alle Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen sind vorhersehbar.

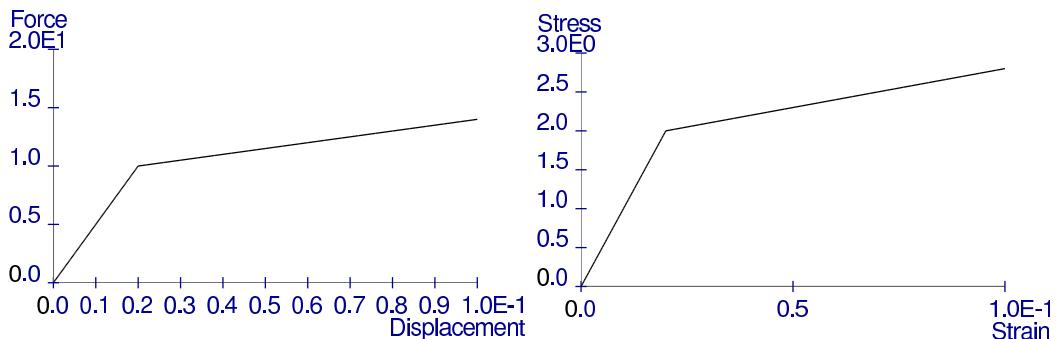


Abbildung 6: Kraft-Verschiebungs-Diagramm und Spannungs-Dehnungs-Diagramm für den Patch-Test der Spannungskomponente σ_{xx}

Die beiden hier vorgestellten 4-knotigen Scheibenelemente erfüllen den linearen und nicht-linearen Patch-Test. Da die zusätzlichen Moden der EAS-Methode nicht aktiviert werden, sind die resultierenden Spannungen und Verzerrungen für beide Elemente gleich.

5.3 Kragbalken mit linearer Momentenbeanspruchung

Mit dem Patch-Test wurde die Vollständigkeit der Elemente kontrolliert. Nun soll der Einfluss der Elementverzerrung überprüft und die beiden Scheibenelemente verglichen werden. Es wird hierzu in Anlehnung an [Andelfinger, 1991] ein Kragbalken bestehend aus 4 Elementen mit unterschiedlicher Verzerrung nach Abbildung 7 gewählt. Die Ergebnisse sind auf eine FE-Lösung von 0.52175 normiert. Als zusätzlichen Vergleich wird das EAS-4 Element von [Andelfinger, 1991] angeführt, welches die gleichen Ansätze wie

das plane4n4eas Element hat. Auffallend ist der starke Versteifungseffekt des plane4n Elementes, welches schon im unverzerrten Elementnetz vorliegt. Das plane4n4eas Element hingegen zeigt ein sehr gutes Verhalten im unverzerrten und mäßiges im verzerrten Elementnetz. Je größer der Verzerrungsgrad, desto größer werden auch hier die Abweichungen.

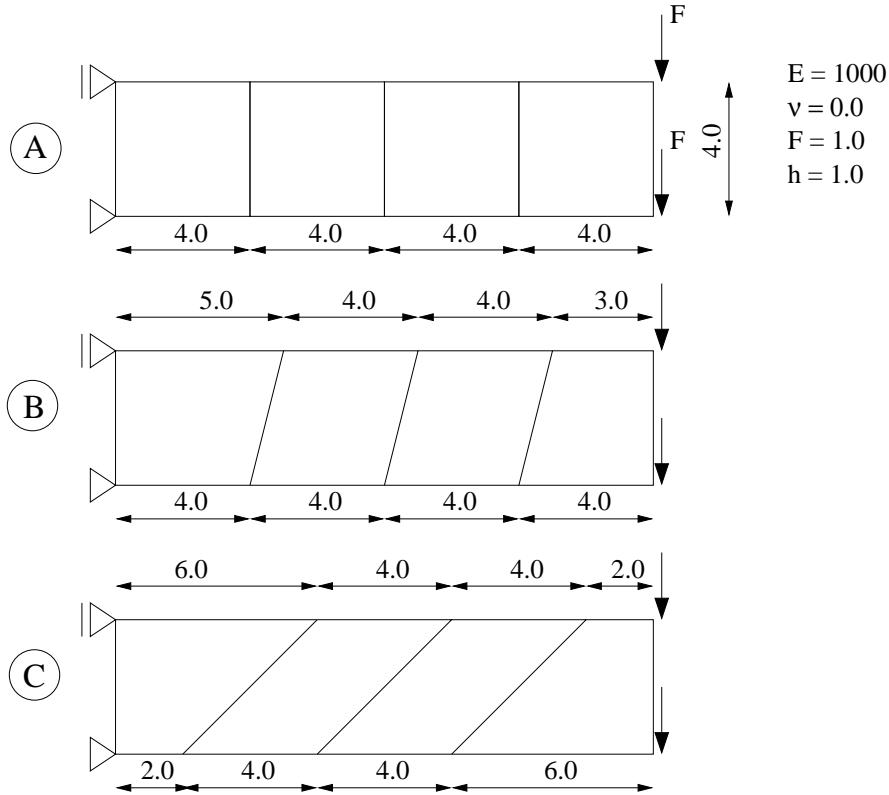


Abbildung 7: Kragarm mit unterschiedlich verzerrtem Elementnetz

	plane4n	plane4n4eas	EAS-4	plane9n
A	0.68	1.00	1.00	1.02
B	0.60	0.98	0.98	1.02
C	0.35	0.93	0.87	1.02

Tabelle 1: Durchbiegung der Kragarmspitze (Oberkante); Solllösung = 1.00

Ungeklärt ist der Unterschied in der Verzerrungskonfiguration C zwischen dem Element plane4n4eas und dem Element EAS-4 von [Andelfinger, 1991] trotz identischer Ansätze. Weiterhin wird zum Vergleich ein 9-knotiges isoparametrisches lagrange Scheibenelement plane9n mit quadratischen Form- und Ansatzfunktionen angeführt. Ein Einfluss der Netzverzerrung bei diesem Element ist nicht zu erkennen, dennoch sind die Abweichungen zur analytischen Lösung (0.5120), zumindest bei unverzerrter Elementkonfiguration, größer.

5.4 Kragbalken mit konstanter Momentenbeanspruchung

Abbildung 8 zeigt ein weiteres Beispiel, um die Versteifungseffekte mit zunehmender Netzverzerrung zu untersuchen. In diesem Fall wird ein konstantes Moment auf einen Kragarm bestehend aus zwei Elementen aufgebracht.

Hier können die gleichen Feststellungen getroffen werden wie im Beispiel mit linearer Momentenbeanspruchung. Das plane4n Element weist schon im unverzerrtem Zustand erhebliche Abweichungen zur analytisch exakten Lösung auf, wobei das plane4n4eas Element mit unverzerrtem Elementnetz exakte Ergebnisse liefert, und sich erst mit fort schreitender Verzerrung verschlechtert. In diesem Fall entspricht der Verlauf des Elementes plane4n4eas dem Verlauf des Elementes EAS-4 von [Andelfinger, 1991].

Auch hier zeigt sich beim Element plane9n kein Einfluss aus der Netzverzerrung, es kann sogar auf Grund der quadratischen Form- und Ansatzfunktionen die Verschiebungen trotz Verzerrung exakt darstellen.

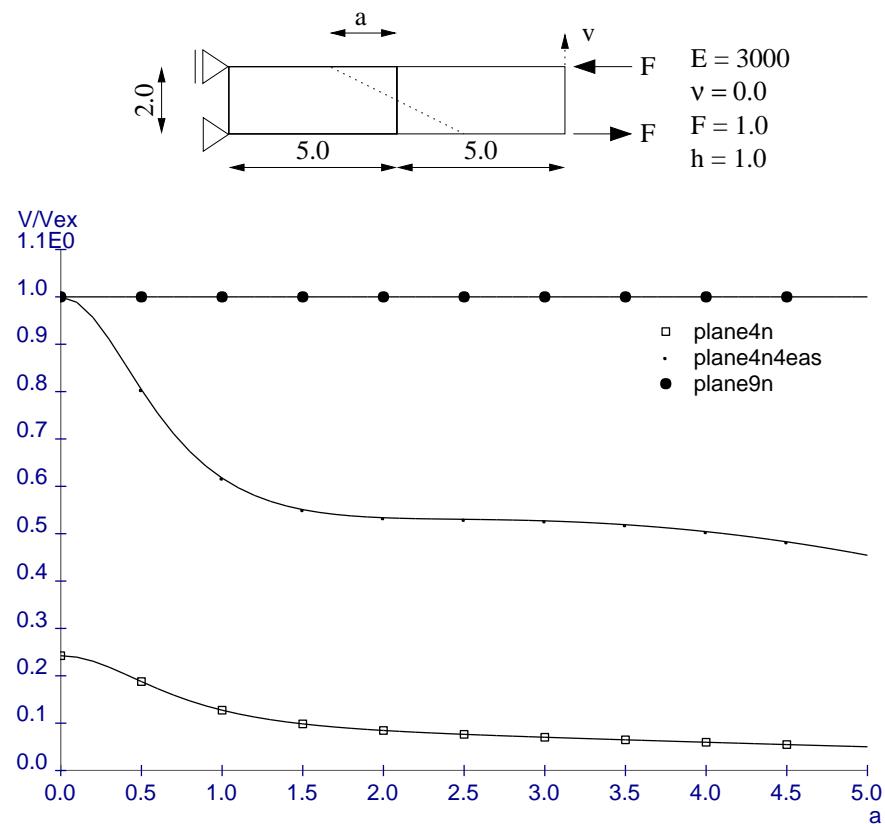


Abbildung 8: Einfluss der Netzverzerrung auf die Durchbiegung

5.5 Aktivierung der EAS-Parameter unter Plastizierung

Mit dem nichtlinearen Patch-Test wurde bereits die Richtigkeit von nichtlinearen Berechnungen überprüft. Dabei wurden jedoch nicht die EAS-Parameter aktiviert. Um die Iteration der EAS-Parameter unter Plastizierung zu überprüfen, wird das folgende Beispiel angeführt.

Hierzu wird die Geometrie und Lasteintragung aus dem vorhergehenden Beispiel nach Abbildung 8 übernommen. Das bilineare Materialgesetz hat die Verfestigungsmoduli 3000 und 600. Die Fließgrenze wird zu 3 definiert. Abbildung 9 zeigt die Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Verzerrungen, welche mit a charakterisiert werden.

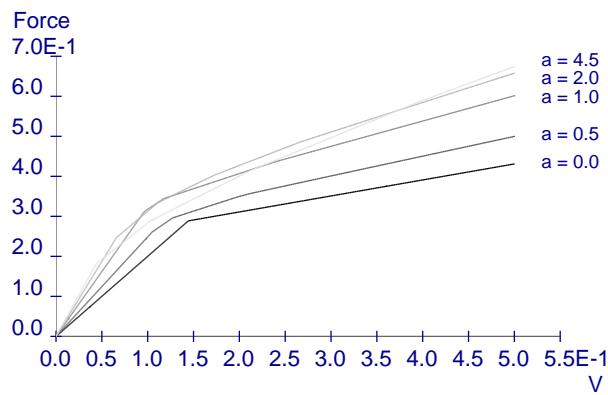


Abbildung 9: Einfluss der Netzverzerrung auf die Durchbiegung v unter Plastizierung

Die unverzerrte Elementkonstellation ($a = 0.0$) zeigt das erwartete Verhalten eines Kragträgers mit konstantem Moment im linearen und nichtlinearen Verlauf.

Wie jedoch das vorhergehende lineare Beispiel vermuten lässt, kann auch hier im nichtlinearen Bereich der Versteifungseffekt mit zunehmender Verzerrung gezeigt werden. Sowohl der 1. als auch der 2. Verfestigungsmodul, ablesbar aus Abbildung 9, ist höher als der Vorgegebene.

Auffallend ist der Bereich in der Nähe der Plastizierungsgrenze. Hier ist ein allmählicher Anstiegswechsel, im Gegensatz zu den unverzerrten Elementen, festzustellen. Bei der unverzerrten Elementkonfiguration sind die von Mises-Vergleichsspannungen in jedem Integrationspunkt der beiden Elemente gleich. Die von Mises-Vergleichsspannungen der verzerrten Konfiguration sind jedoch unterschiedlich. Aus diesem Grunde plastizieren nicht alle Integrationspunkte bei gleicher Belastung. Der ausgerundete Anstieg im Bereich der Fließgrenze ist somit mit einem schrittweisen Plastizieren des Gesamtsystems zu erklären.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Studienarbeit konnte anhand eines 4-knotigen Scheibenelementes die Vor- und Nachteile der EAS-Formulierung aufzeigen. Klare Vorteile sind bei unverzerrten Elementkonfigurationen zu beobachten. Hier kann die EAS-Formulierung die analytische Lösung exakt bzw. sehr genau abbilden. Gegenüber dem 4-knotigen Verschiebungselement konnte die numerische Lösung, aufgrund der „shear locking“-Elimination, wesentlich verbessert werden. Der Vergleich mit 9-knotigen Verschiebungselementen zeigt jedoch, zumindest in den angeführten Beispielen, die Schwachstellen bei verzerrten Elementkonfigurationen.

In nichtlinearen Berechnungen hängt die Effizienz der Berechnung stark von willkürlich festlegbaren Parametern ab. Hier besteht noch erheblicher Forschungsbedarf, um eine höhere Effizienz, unabhängig vom Nutzer, zu erzielen.

Um dieses Element im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 524 vollwertig für die stochastische Modellierung von Materialparametern in Zufallsfeldern [Brenner, 1995] nutzen zu können, sind noch einige Erweiterungen notwendig. Dies ist Gegenstand der momentanen Forschung.

Literatur

- [Andelfinger, 1991] Andelfinger, U. (1991). *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke*. PhD thesis, University of Stuttgart, Germany.
- [Bathe, 1996] Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [Bischoff, 2001] Bischoff, M. (2001). *Advanced Finite Element Methods*. Lecture notes, Technical University of Munich, Germany.
- [Brenner, 1995] Brenner, C. E. (1995). *Ein Beitrag zur Zuverlässigkeitsanalyse von Strukturen unter Berücksichtigung von Systemuntersuchungen mit Hilfe der Methode der Stochastischen Finite Elemente*. PhD thesis, University of Innsbruck, Austria.
- [Bucher, 2002] Bucher, C. e. a. (2002). *SLang -The Structural Language*, 5.0 edition. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University of Weimar, Germany.
- [Freischläger, 2000] Freischläger, C. (2000). *Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier Volumenelemente*. PhD thesis, University Fridericiana of Karlsruhe, Germany.
- [Most and Bucher, 2003a] Most, T. and Bucher, C. (2003a). *Application of the “Fictitious Crack Model” to meshless crack growth calculations*. In *Abstract submitted for the International Conference IKM 2003, Weimar, Germany, June 10-12, 2003*. Bauhaus-University Weimar.
- [Most and Bucher, 2003b] Most, T. and Bucher, C. (2003b). *“Moving Least Squares”-elements for stochastic crack propagation simulations coupled with stochastic finite elements*. In Der Kiureghian, A., Madanat, S., and Pestana, J., editors, *submitted Paper for the ICASP9 2003, San Francisco, California, July 6-9, 2003*. Balkema, Rotterdam.
- [Simo and Rifai, 1990] Simo, J. and Rifai, M. (1990). *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 29:1595–1638.

A CD-ROM

Die beigelegte CD-ROM enthält einige wichtige Dateien, die es dem Leser oftmals erleichtern, den dargestellten Sachverhalt besser nachzuvollziehen. So findet man die angeführten Beispiele mit einer Linux-kompatiblen *SI_{Lang}*-Version, sowie die implementierten Quellcode-Dateien.

Weiterhin beinhaltet diese CD eine PDF-Version des vorliegenden Schriftstückes und einen Teil der verwendeten Literatur.

B Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Maik Brehm

Weimar, den 19.12.2002